

Information about the authors

Danara Bekbolatovna Kasainova* – 2nd year master's student of the educational program «7M01506-Geography», Shakarim University, Semey city, Kazakhstan; e-mail: danara19-91@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0005-8025-4258>.

Zhandos Toleubekovich Mukaev – PhD, associate professor of the department of «Chemistry and Biology», Shakarim University, Semey city, Kazakhstan; e-mail: zhandos.mukaev@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0538-2645>.

Akerke Muratkazinovna Nurpeisova – Senior lecturer of the department of «Chemistry and Biology», Shakarim University, Semey city, Kazakhstan; e-mail: akerke_140285@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-7718-0668>.

Received 07.04.2026

Revised 27.05.2026

Accepted 29.05.2026

[https://doi.org/10.53360/3135-8160-2026-2\(6\)-4](https://doi.org/10.53360/3135-8160-2026-2(6)-4)

FTAXP: 14.25.09

КЕРІ ТРИГОНОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕҢСІЗДІКТЕРДІ ШЕШУ ӘДІСТЕРІНІҢ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

Г.Е. Берикханова*, Ж.Т. Ғафиз

Шәкәрім университеті, Семей қ., Қазақстан

*e-mail: gulnazezhenkan@gmail.com

***Аңдатпа:** Математиканы оқыту үдерісі шығару арқылы жүзеге асады, ал олардың ішінде зерттеу сипатындағы есептердің маңызы зор. Осындай күрделі әрі қызықты тапсырмалардың қатарына кері тригонометриялық функцияларды қамтитын теңсіздіктерді жатқызуға болады.*

Жоғары сынып оқушылары үшін кері тригонометриялық функциялармен байланысты есептер жиі қиындық туғызады. Тәжірибе көрсеткендей, оқушылар кері тригонометриялық функциялардың мәнін есептеу тапсырмаларын орындай алғанымен, дәл осы функцияларды қамтитын теңсіздіктерге келгенде көпшіліктерінде қиындық туындайды. Мұның негізгі себебі – мектеп бағдарламасында кері тригонометриялық функцияларды оқытуға бөлінген уақыттың жеткіліксіздігінде.

Логикалық тұрғыдан алғанда, көрсеткіштік функциялар үшін логарифмдер қаншалықты маңызды болса, тригонометриялық функциялар үшін кері тригонометриялық функциялар да соншалықты қажетті ұғым болып табылады. Бұл тақырыптағы есептер тригонометрияны толықтырып қана қоймай, оқушының математикалық ойлау икемділігін дамытуға үлкен септігін тигізеді. Кері тригонометриялық функциялармен жұмыс істеу оқушыға оқулық «шеңберінен шығып», шығармашылық зерттеу жұмысын бастауға және танымдық қабілеттіктерін арттыруға мүмкіндік береді.

Мектеп бағдарламасында кері тригонометриялық функцияларға қатысты есептер қарастырылғанымен, оқу-әдістемелік құралдарда бұл тақырыпқа тиісті деңгейде көңіл бөлінбеген. Көптеген оқулықтарда тіпті қарапайым теңдеулер мен теңсіздіктерді шешу әдістемесі де толыққанды баяндалмаған. Нәтижесінде, оқушылардың бұл тақырып бойынша білім нәтижелері төмен көрсеткіштікті көрсетуде.

Алайда, кері тригонометриялық функциялары бар теңсіздіктер шешу – оқушының бүкіл тригонометрия курсы бойынша алған білімін жүйелеуге, материалды қаншалықты терең түсінгенін тексеруге және бөлімнің негізгі түйіндерін меңгеруге көмектесетін маңызды құрал. Осы мақала аталған олқылықтардың орнын толтыру мақсатында, кері тригонометриялық теңсіздіктерді шешудің тиімді әдістерін қарастырады.

Түйін сөздер: кері тригонометриялық функциялар, арксинус, арккосинус, арктангенс, арскотангенс, теңсіздік, мәндер жиыны, интервалдар, өсу, кему.

Кіріспе

Тригонометрия мектептегі математика курсына негізгі мектептің Геометрия мен Алгебра курсына ғана емес, жоғарғы сыныптың Алгебра және анализ бастамаларына да қатысты. Тригонометрияны саналы және сапалы зерттеу арқылы біз жеке тұлғаға бағытталған оқыту идеяларын ескере отырып жүзеге асырылатын оқу процесін түсінеміз, оны жүзеге асыру кезінде білімді формальды түрде беруге және дағдыларды схоластикалық өңдеуге жол берілмейді, яғни тригонометрияны оқытуды зерттеу – ойлаудың логикалық және бейнелі компоненттеріне негізделуі керек.

Оқушыларды стандартты емес тригонометриялық теңдеулер мен теңсіздіктерді шешуге және зерттеуге үйретудің әдістемелік ерекшеліктері мектептің математика курсына дағы теңдеулер мен теңсіздіктерді шешу дағдылары негізінде айқындалады. Осындай әдістемелік зерттеулер математика мұғалімінің едәуір дайындық пен еңбекті талап етеді сонымен қатар мұғалімнің өзі тригонометриялық теңдеулер мен теңсіздіктерді шешу дағдыларын қалыптастыру әдістерін жеткілікті түрде игеруге міндетті.

Мектеп курсына дағы математика аса қиын және күрделі тақырыптардың бірі тригонометриялық теңдеулер мен теңсіздіктерді шешу мәселесі болып табылады. Құрамында кері тригонометриялық функциялар бар өрнектерді ықшамдау, олардың мәндерін табуға жеткілікті көңіл бөлінген. Ал кері тригонометриялық теңдеулердің қарапайым түрі қарастырылғанмен, кері тригонометриялық теңсіздіктер мүлде қарастырылмайды. Дегенмен, кері тригонометриялық теңсіздіктер әртүрлі деңгейдегі конкурстар мен олимпиаданың тапсырмаларында кездеседі. Сондықтан бұл тақырыпты оқушылардың меңгеруі – зерттеу жұмысының өзектілігін айқындайды. Жалпы алғанда, кез келген тригонометриялық теңсіздікті шешу оны қарапайым тригонометриялық теңсіздіктердің қандай да бір түріне келтіруге келіп тірелетіні анық.

Мектеп курсына дағы кері тригонометриялық теңсіздіктерді шешудің мынандай әдістемелік ерекшеліктері анықталды:

1) «Тригонометриялық теңсіздіктер» тақырыбы бойынша нақты материалды білу қажеттілігі. Оқушылар арксинус, арккосинус, арктангенс санының анықтамаларын, қарапайым тригонометриялық теңсіздіктерді шешу және тригонометриялық теңбе – теңдіктердің формулаларын білу;

2) Тура функцияның қасиеттерін білу. Атап айтқанда, оқушыларға ақпаратты қорыту және жүйелеу оңай болуы үшін кері тригонометриялық функциялардың қасиеттерін келесі жинақтау кестесі түрінде беру тиімді:

Кері тригонометриялық функция	Қасиеті	Теңсіздікті шешудегі басты назар
$\arcsin(f(x))$	Қатаң өспелі	Теңсіздік таңбасы сақталады, $-1 \leq f(x) \leq 1$ шарты міндетті
$\arccos(f(x))$	Қатаң кемиді	Теңсіздік таңбасы өзгереді, $-1 \leq f(x) \leq 1$ шарты міндетті
$\arctg(f(x))$	Қатаң өспелі	Теңсіздік таңбасы сақталады, $f(x) \in R$.
$\text{arcctg}(f(x))$	Қатаң кемиді	Теңсіздік таңбасы өзгереді, $f(x) \in R$.

3) Кері тригонометриялық теңсіздіктерді шешу кезінде қажетті негізгі біліктерді әзірлеу;

4) Тригонометриялық теңсіздіктерді шешу тәсілдерін білу [1].

Мұндай күрделі тақырыптың тиімді оқытылуы оқушылар «Тригонометрия» тарауына қатысты өтілген материалдарды толық меңгерген жағдайда ғана жүзеге асады.

Зерттеу әдістері

Кері тригонометриялық теңсіздіктерді шешуге саналы және сапалы оқытуды қалыптастыру бойынша білім беру барысында есептердің жүйелі түрде сәтті таңдалып алынуы маңызды. Мұндай теңсіздіктер математиканы оқыту процесінде және тұтастай тұлғаның дамуында лайықты орын алады.

Зерттеудің мақсатына жету үшін, яғни кері тригонометриялық теңсіздіктерді шешу үшін, ғылыми математикалық танымдардың әртүрлі әдістерін қамтитын *кешенді әдістер* қолданылды. Сонымен қатар теңсіздіктерді шешудің стандартты емес әдістерін қолдануды оқушы меңгеруі қажет.

Түрлендірулер нәтижесінде құрамында *аркфункциялар* бар кез-келген $f(x) < g(x)$ теңсіздігін белгілі бір шешу алгоритмі бар стандарт түрге келтіруге бола бермейді. Мұндай жағдайларда $f(x)$ және $g(x)$ *функцияларының қасиеттерін қолдану әдісі* өте тиімді. Бұл функциялардың қарастырып отырған аралықта өсуі мен кемуі, нольдерінің бар болуы, үзіліссіздігі, алгебралық қосындыларының қасиеттері теңсіздікті шешуде кең қолданылады. Бұл әдіс есеп шығару барысында аркфункциялармен қатар, оларға сәйкес тригонометриялық функциялардың қасиеттерін білу мен қолдануды талап етеді. $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының *шенелгендігін, тақ және жұптығын* ескеру берілген теңсіздікті толық зерттеуге мүмкіндік береді.

Кері тригонометриялық теңсіздіктерді шешуде *айнымалыны ауыстыру, жаңа белгілеулер енгізу* әдістері қолданылады. Егер осы әдісті сәтті қолданса, берілген күрделі теңсіздік қарапайым теңсіздікке немесе стандартты шешімі бар теңсіздікке ауысады. Жаңа белгілеулер енгізу әдісін қолдану барысында берілген стандартты емес теңсіздік алгебралық теңсіздікке немесе алгебралық теңсіздіктердің жүйесіне көшуі мүмкін.

Құрамында арсфункциялар бар теңсіздікті шешуде *графиктік әдіс* кең қолданылады. Қарапайым тригонометриялық теңсіздіктер әдетте, сол функцияның графикін немесе бірлік шеңберді қолдануға негізделіп шешіледі. Кері тригонометриялық функциялардан тұратын $f(x) < g(x)$ теңсіздігін ($f(x) > g(x)$) графиктік тәсілмен шешу барысында $y = f(x)$ және $y = g(x)$ функцияларының графиктерін сызып, оларды салыстыру арқылы теңсіздікті қанағаттандыратын аргументтің мәндерінің жиынын табамыз. Бұл әдіс оқушыларға қай функцияның графикі жоғары немесе төмен орналасқанын анықтауда көрнекілік роль атқарады [2].

Кері тригонометриялық теңсіздіктерді шешу барысында *зерттеу әдісі* жиі қолданылады. Теңсіздіктің құрамындағы кері тригонометриялық функциялардың аргументтің әртүрлі аралықтағы мәндеріне сәйкес сипаттамасы ескерледі.

Кері тригонометриялық теңсіздіктерді шешуде оның берілуіне байланысты аталған әдіс – тәсілді сәтті таңдауға тура келеді. Кейбір теңсіздіктерді шешу барысында осы аталған әдістердің бірнеше түрін кешенді қолдануға тура келеді. Сондықтан оқушыға сан-алуан әдістерді меңгерту мұғалімнің өзінен де, қызметінен де үлкен білім мен іскерлікті талап етеді.

Зерттеу нәтижелері

Кері тригонометриялық теңсіздіктерді шешуде жоғарыда айтылған әдістерді қолдануға мысалдар келтірейік.

Кері тригонометриялық функциялары бар ең қарапайым теңсіздіктер мынадай теңсіздіктер болып табылады:

$$\arcsin x \geq a, \arcsin x > a, \arcsin x \leq a, \arcsin x < a \quad (1)$$

және сол жағы $\arccos x, \arctg x, \operatorname{arccotg} x$ –ке ауыстырылған дәл осындай теңсіздіктер. Олардың барлығы бір сарынды шешіледі, сондықтан (1) теңсіздіктердің шешімін қарастырсақ жеткілікті.

Мысал – 1. $\arcsin x \geq a$ теңсіздігін шешу керек [3].

Шешуі. Егер $a \leq -\frac{\pi}{2}$ болса, онда $\arcsin x$ анықтамасы бойынша $[-1; 1]$ кесіндісі берілген теңсіздіктің шешімі болады. Егер $-\frac{\pi}{2} < a \leq \frac{\pi}{2}$ болса, онда теңсіздіктің екі жағынан синус есептеп және $\sin t$ функциясының $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ жиынында өсетінін ескере отырып, шешім ретінде $[a; 1]$ кесіндісін аламыз. Ал егер $a > \frac{\pi}{2}$ болса, онда $\arcsin x$ анықтамасы бойынша шешімдер жоқ.

Мысал – 2. $\arcsin x > a$ теңсіздігін шешу керек.

Шешуі. Егер $a < -\frac{\pi}{2}$ болса, онда $[-1; 1]$ кесіндісі теңсіздіктің шешімі болып табылады. Егер $-\frac{\pi}{2} \leq a < \frac{\pi}{2}$ болса, онда берілген теңсіздіктің екі жағынан синус есептеп, шешім ретінде $(a; 1]$ аралығын аламыз. Соңында, егер $a \geq \frac{\pi}{2}$ болса, онда берілген теңсіздіктің шешімдері жоқ, өйткені $\arcsin x$ анықтама бойынша $\frac{\pi}{2}$ – ден үлкен бола алмайды.

Мысал – 3. $\arcsin x \leq a$ теңсіздігін шешу керек.

Шешуі. Берілген теңсіздікті алдыңғы мысалдарға келтіруге болады. Ол үшін теңсіздіктің екі жағын да -1 санына көбейтеміз және $\arcsin x$ функциясының тақтылық қасиетін пайдаланамыз:

$$-\arcsin x \geq -a$$

бұдан,

$$\arcsin(-x) \geq -a.$$

Егер енді $-x = t$, $-a = b$ деген айнымалыларды енгізсек, онда бізге таныс $\arcsin t \geq b$ теңсіздігін аламыз.

1 –мысалдағы зерттеуге сүйене отырып, берілген теңсіздік үшін бірден мына жауаптарды аламыз:

1. егер $a \leq -\frac{\pi}{2}$ (яғни $b > \frac{\pi}{2}$ болса, онда теңсіздіктің шешімі жоқ;
2. егер $-\frac{\pi}{2} < a \leq \frac{\pi}{2}$ (яғни $-\frac{\pi}{2} < b \leq \frac{\pi}{2}$) болса, онда теңсіздіктің шешімі $[-1; \sin a]$ аралығы болады;
3. егер $a \geq \frac{\pi}{2}$ (яғни $b \leq -\frac{\pi}{2}$) болса, онда берілген теңсіздіктің шешімі $[-1; 1]$ аралығы болады.

$\arcsin x < a$ теңсіздігін шешу де осы мысалдағыдай зерттеу арқылы шешіледі.

Енді күрделі кері тригонометриялық функциялары бар теңсіздіктерді шешу мысалдарын қарастырайық. Ең алдымен, теңсіздіктің сол және оң жақ бөліктері бірдей кері тригонометриялық функциялар болып табылатын теңсіздіктер берілсін. Мұндай теңсіздіктерді шешу кері тригонометриялық функциялардың монотондылық қасиетіне негізделеді. Атап айтқанда $y = \arcsin x$, $y = \arctg x$ функциялары өздерінің анықталу облыстарында монотонды өседі, ал $y = \arccos x$, $y = \text{arcctg} x$ функциялары монотонды кемиді. Яғни:

$$\begin{aligned} \arcsin f(x) \leq \arcsin g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -1, \\ g(x) \leq 1; \end{cases} \\ \arccos f(x) \leq \arccos g(x) &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ g(x) \geq -1, \\ f(x) \leq 1; \end{cases} \\ \arctg f(x) \leq \arctg g(x) &\Leftrightarrow f(x) \leq g(x); \\ \text{arcctg} f(x) \leq \text{arcctg} g(x) &\Leftrightarrow f(x) \geq g(x) [1]. \end{aligned}$$

Мысал – 4. $\arctg(2x^2 - 5x - 1) \leq \arctg(2x - 5 - x^2)$ теңсіздігін шешу керек [4].

Шешуі. Бұл теңсіздікті шешу үшін $y = \arctg(t)$ функциясының қасиетін қолданамыз. $y = \arctg(t)$ функциясы $D(y) \in (-\infty; +\infty)$ барлық сан осінде анықталған және өзінің анықталу облысында қатаң өспелі функция болып табылады.

Функцияның өспелілік қасиетіне сүйене отырып, аргументтерді теңсіздік белгісін өзгертпей салыстыра аламыз. Нәтижесінде келесі алгебралық теңсіздікті шешуге келеміз:

$$2x^2 - 5x - 1 \leq 2x - 5 - x^2$$

Теңсіздіктің оң жағындағы мүшелерді сол жаққа көшіріп, ұқсас мүшелерді біріктіреміз:

$$3x^2 - 7x + 4 \leq 0$$

Алынған квадрат теңсіздіктің түбірлерін Виет теоремасы немесе дискриминант арқылы табамыз. Түбірлері: $x = 1$ және $x = \frac{4}{3}$. Интервалдар әдісін немесе парабола тармақтарының бағытын (жоғары қараған) ескере отырып, теңсіздікті қанағаттандыратын аралықты анықтаймыз:

$$1 \leq x \leq \frac{4}{3}.$$

Мысал – 5. $\arccos(2x^2 + 3x + 1) < \arccos(6x^2 + x - 1)$ теңсіздігін шешу керек.

Шешуі. $y = \arccos(t)$ функциясының қасиетіне қарастырайық.

$y = \arccos(t)$ функциясының анықталу облысы $[-1; 1]$ және функция бұл аралықта қатаң кемімелі. Берілген аралықта кемімелі функцияның анықтамасынан

$\arccos(2x^2 + 3x + 1) < \arccos(6x^2 + x - 1)$ теңсіздігі мынандай алгебралық теңсіздіктердің жүйесі арқылы жазылады:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 > 6x^2 + x - 1, \\ 6x^2 + x - 1 \geq -1, \\ 2x^2 + 3x + 1 \end{cases}.$$

$$\text{Бұдан } \begin{cases} 2x^2 - x - 1 < 0 \\ 6(6x + 1) \geq 0 \\ x(2x + 3) \leq 0 \end{cases}.$$

Бірінші теңсіздікті көбейткіштерге жіктеу үшін квадрат үшмүшеліктің түбірлерін табамыз. Виет теоремасы бойынша: $\begin{matrix} x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2} \\ x_1 + x_2 = \frac{1}{2} \end{matrix}$, бұдан $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$.

$2x^2 - x - 1 < 0$ теңсіздігіміз $(x - 1)(x + \frac{1}{2}) < 0$ түріне келеді.

$$\text{Сонда теңдеулер жүйесі: } \begin{cases} (x - 1)(x + \frac{1}{2}) < 0 \\ x \geq -\frac{1}{6} \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Бұл жүйенің шешімі, яғни берілген теңсіздіктің шешімі: $x \in (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{6}] \cup \{0\}$.

Сол және оң жақ бөліктері әр түрлі кері тригонометриялық функциялар болып табылатын теңсіздіктерді қарастырайық. Оларды шешу кезінде біз өзімізге белгілі тригонометриялық тепе-теңдіктер қолданамыз.

Мысал – 6. $\arcsin(2x - 5) \geq \arccos(3x - 7)$ теңсіздігін шешу керек.

Шешуі. Берілген теңсіздікті $\arcsin(2x - 5) - \arccos(3x - 7) \geq 0$ түрінде жазып, $f(x) = \arcsin(2x - 5) - \arccos(3x - 7)$ функциясын қарастырайық. Сонда алынған $f(x) \geq 0$ теңсіздігін интервалдар әдісімен шешеміз.

Алдымен функцияның анықталу облысын табайық. Арксинус және арккосинус функцияларының анықтамасы бойынша $f(x)$ функциясының анықталу облысы $\begin{cases} |2x - 5| \leq 1 \\ |3x - 7| \leq 1 \end{cases}$ теңсіздіктер жүйесінің шешімі болады.

Модулі бар теңсіздіктерді түрлендірсек, жүйеміз мына түрге келеді:

$$\begin{cases} -1 \leq 2x - 5 \leq 1 \\ -1 \leq 3x - 7 \leq 1 \end{cases} \text{ бұдан } \begin{cases} 2 \leq x \leq 3 \\ 2 \leq x \leq \frac{8}{3} \end{cases} \text{ оның шешімі } 2 \leq x \leq \frac{8}{3}.$$

Енді функцияның нөлдерін табайық.

Ол үшін $\arcsin(2x - 5) = \arccos(3x - 7)$ теңдеуін шешеміз. Ең алдымен осы екі өрнекті қандай да бір α бұрышына теңестірейік:

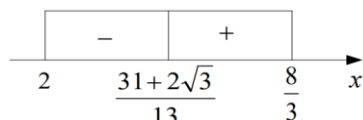
$$\alpha = \arcsin(2x - 5), \quad \alpha = \arccos(3x - 7).$$

Енді осы мәндерді $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ формуласына қоямыз:

$$(2x - 5)^2 + (3x - 7)^2 = 1, \quad 13x^2 - 62x + 73 = 0 \quad \text{бұдан} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{31-2\sqrt{3}}{13} \\ x_2 = \frac{31+2\sqrt{3}}{13} \end{cases}$$

$\arccos$ функциясының мәндер жиыны $[0; \pi]$ аралығында жатады, ал $\arcsin$ функциясының мәндер жиыны $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ аралығында жатады. $x = \frac{31-2\sqrt{3}}{13}$ мәні $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ аралығына тиісті емес. Сондықтан ол есеп шартын қанағаттандырмайды.

Енді $f(x) \geq 0$ теңсіздігін интервалдар әдісімен шығарайық.



Сонда берілген теңсіздіктің шешімі $[\frac{31+2\sqrt{3}}{13}; \frac{8}{3}]$ аралығы болады.

Мысал – 7. $\arcsin(\sin x) + 2 \arccos(\cos x) \leq x - 5$ теңсіздігін шешу керек.

Шешуі. Берілген теңсіздіктің құрамында аркфункциялармен қатар алгебралық өрнек бар. Сондықтан бұл кері тригонометриялық теңсіздікті шешу үшін графиктік әдісті қолданайық.

Теңсіздікті шешу үшін $f(x) = \arcsin(\sin x) + 2 \arccos(\cos x)$ және $g(x) = x - 5$ функцияларының графиктерін саламыз. $f(x)$ функциясы периодты, оның периоды $T = 2\pi$. Сондықтан графикті $[0; 2\pi]$ аралығында зерттеу жеткілікті.

Егер $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$, онда $\arcsin(\sin x) = x$, $\arccos(\cos x) = x$ болады да, функцияның осы аралықтағы графигі $y = 3x$ түзуінің графигімен сәйкес келеді.

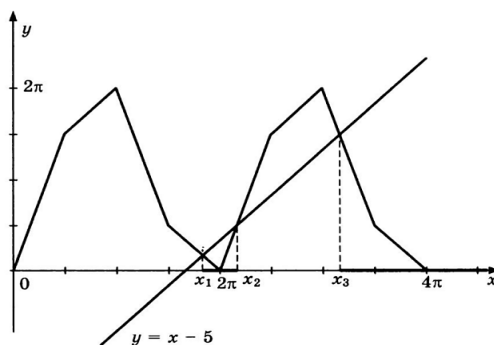
Егер $x \in [\frac{\pi}{2}; \pi]$, онда $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$, $\arccos(\cos x) = x$ болады да, функцияның осы аралықтағы графигі $y = x + \pi$ түзуінің графигімен сәйкес келеді.

Егер $x \in [\pi; \frac{3\pi}{2}]$, онда $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$, $\arccos(\cos x) = \arccos(\cos(2\pi - x)) = 2\pi - x$ болады да, функцияның осы аралықтағы графигі $y = -3x + 5\pi$ түзуінің графигімен сәйкес келеді.

Егер $x \in [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]$, онда $\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(x - 2\pi)) = x - 2\pi$, $\arccos(\cos x) = \arccos(\cos(2\pi - x)) = 2\pi - x$ болады да, функцияның осы аралықтағы графигі $y = -x + 2\pi$ түзуінің графигімен сәйкес келеді.

Осы зерттеулерді пайдаланып, аргументтің әрбір аралықтағы мәндері үшін $f(x) = \arcsin(\sin x) + 2 \arccos(\cos x)$ және $g(x) = x - 5$ функцияларының графиктерін саламыз.

1 суретте бастапқы теңсіздіктің шешімдер жиынын тікелей береді: ол $[x_1; x_2]$ кесіндісінен және $[x_3; +\infty]$ сәулесінен тұрады.



Сурет 1 – $y = \arcsin(\sin x) + 2 \arccos(\cos x)$ және $y = x - 5$ функцияларының графиктері.

Бұл жауапты алгебралық түрде жазу үшін x_1, x_2, x_3 нүктелерін табу керек.

x_1 нүктесі $y = -x + 2\pi$ және $y = x - 5$ түзулерінің қиылысу нүктесінің абсциссасы ретінде табылады, яғни $x_1 = \pi + \frac{5}{2}$.

x_2 нүктесі $y = 3(x - 2\pi)$ және $y = x - 5$ түзулерінің қиылысу нүктесінің абсциссасы ретінде табылады, яғни $x_2 = 3\pi - \frac{5}{2}$.

x_3 нүктесі $y = -3(x - 2\pi) + 5\pi$ және $y = x - 5$ түзулерінің қиылысу нүктесінің абсциссасы ретінде табылады, яғни $x_3 = \frac{11\pi+5}{4}$.

Сонда берілген теңсіздіктің жауабы: $\left[\pi + \frac{5}{2}; 3\pi - \frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{11\pi+5}{4}; +\infty\right)$ аралығы болады.

Мысал – 8. $\arcsin(\pi x) \leq \frac{1}{12}$ теңсіздігін шешу керек.

Шешуі. Теңсіздікті графиктік әдіспен шешеміз.

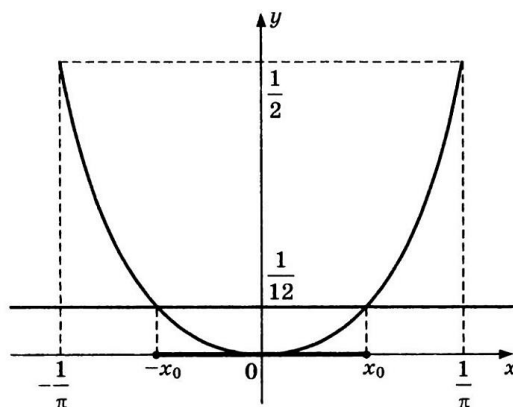
$f(x) = \arcsin(\pi x)$ функциясы $x \in \left[-\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi}\right]$ аралығында анықталған және жұп функция болып табылады:

$$f(-x) = (-x) \arcsin(\pi(-x)) = (-x)(-\arcsin(\pi x)) = f(x).$$

$x \in \left[0; \frac{1}{\pi}\right]$ болғанда, бұл функция $f(0) = 0$ -ден $f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{1}{2}$ -ге дейін монотонды өседі (екі теріс емес өспелі $y = x$ және $y = \arcsin(\pi x)$ функцияларының көбейтіндісі ретінде).

Сондықтан оның графигі 2 суретте көрсетілгендей болады. Бұл суреттен біздің теңсіздігіміздің шешімі $[-x_0; x_0]$ түрінде болатыны анық, бұндағы x_0 - сәйкес теңдеудің оң түбірі. $x_0 = \frac{1}{2\pi}$ екенін табу қиын емес.

Жауабы: $\left[-\frac{1}{2\pi}; \frac{1}{2\pi}\right]$.



Сурет 2 – $y = \arcsin(\pi x)$ және $y = \frac{1}{12}$ функцияларының графиктері

Қорытынды

Қорытындылай келе, кері тригонометриялық функцияларды қамтитын теңсіздіктерді шешу – мектеп математикасындағы күрделі, бірақ өте маңызды тақырыптардың бірі болып табылады. Мақалада қарастырылған мысалдар көрсеткендей, мұндай есептерді шешу үшін функциялардың анықтамаларын, олардың анықталу және мәндер облысын, сондай-ақ монотондылық (өспелі немесе кемімелі) қасиеттерін жетік білу қажет.

Күрделі болып көрінетін теңсіздіктерді қарапайым түрлендірулер, интервалдар әдісі сияқты тәсілдерді қолдану арқылы сәтті шешуге болады. Бұл әдістер есептің шешімін жүйелі түрде табуға мүмкіндік береді.

Ең бастысы, кері тригонометриялық функциялары бар теңдеулер мен теңсіздіктерді шешу оқушылардың бүкіл тригонометрия курсы бойынша алған білімдерін жүйелейді, материалды қаншалықты терең түсінгенін және бөлімнің түйінді сәттерін меңгергенін тексереді. Сонымен қатар, мұндай тапсырмалар оқушылардың математикалық ойлау икемділігін арттырып, зерттеушілік дағдыларын дамытуға зор үлес қосады.

Қарастырылған мысалдардан кері тригонометриялық теңсіздіктерді шешу әдісін таңдау мен оны зерттеу қатар жүргізілетіндігіне көз жеткіздік. Оқушыларды берілген теңсіздіктерді шешудің бірнеше тәсілдерінің ішінен тиімдісін тандап алуға, сонымен қатар бірнеше тәсілмен шығарып, әртүрлі тәсілдерді меңгертуге үйрету маңызды.

Құрамында аркфункциялар бар теңсіздіктерді математикалық үйірмеде, сыныптан тыс сабақтарда, олимпиадаға дайындауда қолдану арқылы теңсіздіктерді дәстүрлі емес әдістермен шығаруға, тиімді тәсілдерді іздеуге оқушыларды баулуға және ынталандыруға болады.

Әдебиеттер тізімі

1. Дроздов В.Б. Аркфункции в задачах / В.Б. Дроздов // Математика в школе. – 2010. – № 4. – С. 31-35. <https://elib.pnzgu.ru/files/eb/doc/DNHU9s5kU3A.pdf>.
2. Sterling M.J. Trigonometry For Dummies. 3rd ed. John Wiley & Sons. – 2023. – 400 p. https://books.google.kz/books/about/Trigonometry_For_Dummies.html?id=tBirEAAAQBAJ&redir_esc=y.
3. Фалин Г.И. Обратные тригонометрические функции. 10-11 классы / Г.И. Фалин, А.И. Фалин. – М.: Экзамен, 2012. – 226 с. <https://go.11klasov.net/3127-obratnye-trigonometricheskie-funkcii-10-11-klassy-falin-gi-falin-ai.html>.
4. Фалин Г.И. Тригонометрия на вступительных экзаменах по математике в МГУ / Г.И. Фалин, А.И. Фалин. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 327 с. <https://postypashki.ru/wp-content/uploads/2019/02/%D0%A2%D1%80%D0%B8%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F-%D0%9C%D0%93%D0%A3.pdf>
5. Алгебра және анализ бастамалары: Жалпы білім беретін мектептің қоғамдық-гуманитарлық бағытындағы 10-сынып оқушыларына арналған оқулық / О. Пак т.б. – Алматы: Кітап, 2019. – 240 б. <https://okulyk.kz/algebra/548/>.
6. Абылкасымова А.Е. Алгебра және анализ бастамалары: Жалпы білім беретін мектептің қоғамдық-гуманитарлық бағытындағы 10-сынып оқушыларына арналған оқулық / А.Е. Абылкасымова, З. Жұмағұлова. – Алматы: Мектеп, 2019. – 153 б. <https://okulyk.kz/algebra/489/>.
7. Әбілқасымова А.Е. Алгебра және анализ бастамалары: Жалпы білім беретін мектептің қоғамдық-гуманитарлық бағытындағы 11-сынып оқушыларына арналған оқулық / А.Е. Әбілқасымова, В.Е. Корчевский, З.Ә. Жұмағұлова. – Алматы: Мектеп, 2019. – 168 б. <https://okulyk.kz/algebra/664/>.
8. Әбілқасымова А.Е. Алгебра және анализ бастамалары: Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 11-сынып оқушыларына арналған оқулық. А.Е. Әбілқасымова, В.Е. Корчевский, З.Ә. Жұмағұлова. – Алматы: Мектеп, 2019. – 254 б. <https://mylibrary.kz/uchebniki/algebra/algebra-i-nachala-analiza-dlja-11-klassa-abylkasymova-a-e-zhumagulova-z-a/>.
9. Сборник задач по курсу математического анализа: Уч. Пособие / Г.Н. Берман. – 22-е изд., Москва: Профессия, 2001. – 432 с. <https://files.ttuwiki.ee/Berman.pdf>.
10. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / В.К. Егоров и др. Под ред. М.И. Сканави. – Москва: Мир и Образование, 2013. – 608 с. <https://www.kimep.kz/prospective-students/files/2019/12/Finaid-Olymp-Skanavi.pdf>.

References

1. Drozdov V.B. Arkfunktсии v zadachakh / V.B. Drozdov // Matematika v shkole. – 2010. – № 4. – S. 31-35. <https://elib.pnzgu.ru/files/eb/doc/DNHU9s5kU3A.pdf>. (In Russian).
2. Sterling M.J. Trigonometry For Dummies. 3rd ed. John Wiley & Sons. – 2023. – 400 p. https://books.google.kz/books/about/Trigonometry_For_Dummies.html?id=tBirEAAAQBAJ&redir_esc=y. (In English).
3. Falin G.I. Obratnye trigonometricheskie funktsii. 10-11 klassy / G.I. Falin, A.I. Falin. – M.: Ehkzamen, 2012. – 226 s. <https://go.11klasov.net/3127-obratnye-trigonometricheskie-funkcii-10-11-klassy-falin-gi-falin-ai.html>. (In Russian).

4. Falin G.I. Trigonometriya na vstupitel'nykh ehkzamenakh po matematike v MGU / G.I. Falin, A.I. Falin. – M.: BINOM. Laboratoriya znaniy, 2007. – 327 s. <https://postypashki.ru/wp-content/uploads/2019/02/%D0%A2%D1%80%D0%B8%D0%B3%D0%BE%D0%BD%D0%BE%D0%BC%D0%B5%D1%82%D1%80%D0%B8%D1%8F-%D0%9C%D0%93%D0%A3.pdf>. (In Russian).
5. Algebra zhane analiz bastamalary: Zhalpy bilim beretin mekteptin kogamdyk-gumanitaryk bagytyndagy 10-synyp okushylaryna arnalgan okulyk / O. Pak t.b. – Almaty: Kitap, 2019. – 240 b. <https://okulyk.kz/algebra/548/>. (In Kazakh).
6. Abylkasymova A.E. Algebra zhane analiz bastamalary: Zhalpy bilim beretin mekteptin kogamdyk-gumanitaryk bagytyndagy 10-synyp okushylaryna arnalgan okulyk / A.E. Abylkasymova, Z. Zhumagulova. – Almaty: Mektep, 2019. – 153 b. <https://okulyk.kz/algebra/489/>. (In Kazakh).
7. Əbilkasymova A.E. Algebra zhane analiz bastamalary: Zhalpy bilim beretin mekteptin kogamdyk-gumanitaryk bagytyndagy 11-synyp okushylaryna arnalgan okulyk / A.E. Abilkasymova, V.E. Korchevskii, Z.A. Zhumagulova. – Almaty: Mektep, 2019. – 168 b. <https://okulyk.kz/algebra/664/>. (In Kazakh).
8. Abilkasymova A.E. Algebra zhane analiz bastamalary: Zhalpy bilim beretin mekteptin zharatylystanu-matematika barytyndagy 11-synyp okushylaryna arnalgan okulyk. A.E. Abilkasymova, V.E. Korchevskii, Z.A. Zhumagulova. – Almaty: Mektep, 2019. – 254 b. <https://mylibrary.kz/uchebniki/algebra/algebra-i-nachala-analiza-dlja-11-klassa-abylkasymova-a-e-zhumagulova-z-a/>. (In Kazakh).
9. Sbornik zadach po kursu matematicheskogo analiza: Uch. Posobie / G.N. Berman. – 22-e izd., Moskva: Professiya, 2001. – 432 s. <https://files.ttuwiki.ee/Berman.pdf>. (In Russian).
10. Sbornik zadach po matematike dlya postupayushchikh vo vtuzy / V.K. Egerev i dr. Pod red. M.I. Skanavi. – Moskva: Mir i Obrazovanie, 2013. – 608 s. <https://www.kimep.kz/prospective-students/files/2019/12/Finaid-Olymp-Skanavi.pdf>. (In Russian).

ОСОБЕННОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ

Г.Е. Берикханова*, Ж.Т. Гафиз

Шәкәрім университет, г. Семей, Казахстан

*e-mail: gulnazezhenkan@gmail.com

Аннотация: *Фундаментом обучения математике всегда было и остается решение задач, среди которых особое место занимают задания исследовательского типа. К категории наиболее сложных, но в то же время содержательных упражнений можно смело отнести неравенства с обратными тригонометрическими функциями. Как показывает педагогическая практика, старшеклассники часто пасуют перед этой темой. Если с простыми вычислениями значений «арков» ученики еще справляются, то решение полноценных неравенств вызывает у большинства серьезные затруднения. Корень проблемы видится в дефиците учебного времени: школьная программа лишь вскользь касается этой темы. Между тем, с точки зрения логики, обратные тригонометрические функции так же важны для тригонометрии, как логарифмы для понимания показательных функций. Работа с ними не просто дополняет теоретический курс, а колоссально развивает гибкость математического мышления, заставляя ученика выйти за привычные рамки учебника и попробовать себя в настоящем поиске. Несмотря на очевидную значимость, в современной методической литературе наблюдается явный пробел. Даже в профильных учебниках методика решения таких задач изложена фрагментарно, что напрямую сказывается на результатах экзаменов. Однако именно эти неравенства являются тем инструментом, который позволяет систематизировать знания за весь школьный курс и проверить глубину понимания предмета. Данная статья призвана восполнить эти методические пустоты и предложить эффективные алгоритмы решения.*

Ключевые слова: обратные тригонометрические функции, арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс, неравенство, множество значений, интервалы, возрастание, убывание.

FEATURES OF METHODS FOR SOLVING INVERSE TRIGONOMETRIC INEQUALITIES

G.E. Berikhanova*, Zh.T. Gafiz

Shakarim University, Semey, Kazakhstan

*e-mail: gulnazezhenkan@gmail.com

Abstract: The process of teaching mathematics is carried out through problem-solving, among which research-oriented problems are of great importance. Inequalities involving inverse trigonometric functions can be classified as such complex and interesting tasks. For high school students, problems related to inverse trigonometric functions often cause difficulties. As practice shows, while students can successfully complete tasks to calculate the values of inverse trigonometric functions, many encounter difficulties when dealing with inequalities that contain these exact functions. The main reason for this is the insufficient time allocated to teaching inverse trigonometric functions in the school curriculum. From a logical standpoint, just as logarithms are essential for exponential functions, inverse trigonometric functions are an equally necessary concept for trigonometric functions. Problems on this topic not only complement trigonometry but also significantly contribute to developing the flexibility of students' mathematical thinking. Working with inverse trigonometric functions allows students to go "beyond the textbook," initiate creative research work, and enhance their cognitive abilities. Although problems related to inverse trigonometric functions are included in the school curriculum, educational and methodological materials do not pay adequate attention to this topic. Many textbooks fail to fully explain the methodology for solving even simple equations and inequalities. As a result, students' learning outcomes on this topic indicate low performance levels. However, solving inequalities with inverse trigonometric functions is a crucial tool that helps systematize the knowledge students have acquired throughout the entire trigonometry course, assess their depth of understanding, and master the core concepts of the section. In order to fill these gaps, this article examines effective methods for solving inverse trigonometric inequalities.

Key words: inverse trigonometric functions, arcsine, arccosine, arctangent, arccotangent, inequality, range of values, intervals, increasing, decreasing.

Авторлар туралы мәлімет

Гульназ Еженханова Берикханова* – физика-математика ғылымдарының докторы, қауымдастырылған профессор, Шәкәрім университеті, Семей, Қазақстан; e-mail: gulnazezhenkan@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3308-4346>.

Жарас Тоқтасынұлы Ғафиз – 2 курс магистранты, Шәкәрім университеті, Семей, Қазақстан; e-mail: gafiz03@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5533-5090>.

Сведения об авторах

Гульназ Еженханова Берикханова* – доктор физико-математических наук, ассоциированный профессор, Шәкәрім университет, Семей, Казахстан; e-mail: gulnazezhenkan@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3308-4346>.

Жарас Тоқтасынұлы Ғафиз – магистрант 2-го курса, Шәкәрім университет, Семей, Казахстан; e-mail: gafiz03@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5533-5090>.

Information about the authors

Gulnaz Ezhenkhanova Berikhanova* – Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Shakarim University, Semey, Kazakhstan; e-mail: gulnazezhenkan@gmail.com. ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3308-4346>.

Zharas Toqtasynuly Gafiz – 2nd-year Master's student, Shakarim University, Semey, Kazakhstan; e-mail: gafiz03@mail.ru. ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5533-5090>.

Редакцияға енуі 28.04.2026

Өңдеуден кейін түсуі 03.06.2026

Жариялауға қабылданды 10.06.2026

[https://doi.org/10.53360/3135-8160-2026-2\(6\)-6](https://doi.org/10.53360/3135-8160-2026-2(6)-6)

IRSTI: 14.35.09

ANALYSIS OF THE ROLE OF TEACHERS AND TUTORS IN THE PROCESS OF ENGLISH LANGUAGE TEACHING AND LEARNING

T.A. Tansykbayeva

Kazakh National Women's teacher training University, Almaty, Kazakhstan

e-mail: mstolkyn178@gmail.com

Abstract: *The presence of tutors in the learning process plays as important a role as the role of teachers. The difference lies in the amount of work: in training courses, the role of tutors is higher, while in schools it is higher. Being a tutor is not an easy task, requiring creativity and innovation in teaching to make learning more enjoyable. In addition, students need encouragement and motivation to achieve optimal learning outcomes. The purpose of this study is (1) to explain the role of tutors in English language learning methods and processes to improve learning effectiveness, (2) to describe the influence of the tutor's personality and discipline on English language learning, and (3) to explain the assessment of classes as a factor that increases the effectiveness of English language learning. The study uses a simple non-experimental quantitative method with survey design, complemented by observation and documentation analysis. The research stages include preliminary preparation, literature review, method development, toolkit development, data collection, data analysis, and presentation of research results. The data was obtained through a survey conducted among 150 respondents. The results of the study show that the role of the teacher in improving the effectiveness of learning is crucial. The personal qualities and discipline of teachers in learning English influence students, and classroom assessments have shown that they increase the effectiveness of learning English. In general, teachers are able to provide satisfactory services and make a positive contribution to English language learning. The target result of the study is publication in an accredited national educational journal.*

Key words: *the role of a teacher, learning English, personality, assessment of classes, language center.*

Introduction

Tutor is a term referring to a teacher in non – formal educational institutions such as courses, homeschooling, or similar educational programs [1]. There is no difference between teachers and tutors in the performance of their duties; tutors can also be called educators. It is assumed that with the help of a tutor, the learning process can proceed smoothly and efficiently. This is consistent with